数理解析研究所講究録
909 巻 1995 年 54-64

DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR PRINCIPAL SERIES WHITTAKER FUNCTIONS ON $SU(2,2)$

神戸大自然科学 早田 孝博 (Takahiro Hayata)

保型形式を研究する際、その Fourier 展開の係数は重要である。そのため、二次のエルミート上半空間の波動形式のそれに現われる Whittaker 関数をできるだけ正確に求めるということは興味深い問題である。今回その Whittaker 関数の満たす微分方程式を得たので、それについて説明する。

1 Whittaker 関数

まず、Whittaker 関数の定義から始めよう。

G を実半単純リー群、K をその極大コンパクト部分群、P を極小放物型部分群、そして、N を P のべき等根基とする。(π, H_π) を G の P - 主系列表現、また、η を N のユニタリ指標とする。このとき、$(\mathfrak{g}, K)$ 加群としての intertwining 作用素の空間、

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(H_\pi^K, C_\eta^\infty(N\backslash G))$$

の元 Φ_π を Whittaker vector という。ここで、

$$C_\eta^\infty(N\backslash G) = \{\, \phi \in C^\infty(G) \mid \phi(ng) = \eta(n)\phi(g),\ \ n \in N,\ g \in G \,\}$$

とした。次に (τ, V_τ) を K の有限次既約表現とし、その双対表現 (τ^*, V_{τ^*}) が π の K-type となっているものとする。$\iota_{\tau^*} : V_{\tau^*} \to H_\pi$ をその K- 単射とするとき、Whittaker vector Φ_π に対し、

$$\Phi_\pi(\iota_{\tau^*}(v^*))(g) = <v^*, \Phi_{\pi,\tau}(g)>, \quad (v^* \in V_{\tau^*},\ g \in G)$$

で定まる $\Phi_{\pi,\tau} \in C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K)$ を (π の K-type τ^* に付随する) Whittaker 関数という。ここで、

$$C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K) = \left\{F \in C^\infty(G, V_\tau) \mid F(ngk) = \eta(n)\tau(k)^{-1}F(g),\ (n,g,k) \in N \times G \times K\right\}$$

であり $<,>$ は V_{τ^*} と V_τ の内積である。

A を G の $\mathbb{R}$-split torus の単位元の連結成分とする。このとき岩沢分解 $G = NAK$ を考えることにより、$C_{\eta,\tau}^\infty(N\backslash G/K)$ の元はその A への制限で特徴付けられる。これをその関数の動径成分 (radial part) と呼ぶ。したがって、Whittaker 関数の微分方程式と言った場合、ここではその動径成分の満たす微分方程式を意味する。

2 Shift operator について

これから shift operator を定義し、その性質を見ていこう。

まず最初に $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を Cartan 分解とし、$\mathfrak{p}$ の複素化 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 上の K の adjoint 表現 Ad を考える。Ad は自己双対的で、以下その双対表現を Ad と同一視する。ここで、(τ, V_τ) を K の有限次既約表現、$\{X_j\}$ を Killing 形式に関する $\mathfrak{p}$ の正規直交基底とするとき、次の K- 共変な写像 ∇ を Schmid operator という。

$$
\begin{aligned}
\nabla : C^\infty_{\eta,\tau}(N\backslash G/K) &\longrightarrow C^\infty_{\eta,\tau\otimes \mathrm{Ad}}(N\backslash G/K) \\
F &\mapsto \nabla F = \sum_j R_{X_j} F(\cdot)\otimes X_j
\end{aligned}
\tag{1}
$$

これは正規直交基底の選び方によらない。

一般に $\tau\otimes\mathrm{Ad}$ は既約とは限らない。そのためその既約成分へ制限することを考えよう。$(\tau', V_{\tau'})$ をその既約成分とし、$P_{\tau'}$ をそれへの K- 射影とする。このとき $P_{\tau'}\circ\nabla$ は $C^\infty_{\eta,\tau}(N\backslash G/K)$ から $C^\infty_{\eta,\tau'}(N\backslash G/K)$ への K- 共変な写像となる。これを shift operator と呼ぶ。

Whittaker 関数の満たす微分方程式を求める際、shift operator は重要な働きをする。それは、「shift operator は Whittaker 関数を固有関数に持つ」という性質を持つからである。以下、このことについて説明しよう。

(π, H_π) を G の許容表現とし、(τ, V_τ) を K の有限次既約表現でその双対表現 τ^* が π の K-type となるものとする。$\iota=\iota_{\tau^*}: V_{\tau^*}\to H_\pi$ でその K- 単射を表す。簡単のため $P=P_{\tau'}$ と置く。任意の $v'^*\in V_{\tau'}^*$, $v'\in V_{\tau'}$, $X\in\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ に対し、

$$
< P^*(v'^*), v'\otimes X > = < v'^*, P(v'\otimes X) >
$$

で自然な K 単射 P^* を定める。次に「掛け算写像」m を、

$$
m : V_{\tau^*}\otimes\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \ni v^*\otimes X \longmapsto \pi(X)\iota_{\tau^*}(v^*)\in H_\pi
$$

で定義される K- 準同型 とする。さて、写像、

$$
m\circ P^* : V_{\tau'^*}\to H_\pi
$$

を考えよう。τ' の既約性より、恒等的に 0 でないならば、

$$
m\circ P^* = c_{\tau,\tau'}\cdot\iota_{\tau'^*}
\tag{2}
$$

となる K- 単射 $\iota'=\iota_{\tau'^*}$ とそれによってきまる定数 $c_{\tau,\tau'}$ が存在することがわかる。この式が本質的に Whittaker 関数と shift operator の関係を述べているのである。このことをもっと直接に見るため、もうしばらく計算をして見よう。

$\{v_k\}$, (resp. $\{v'_k\}$) を V_τ, (resp. $V_{\tau'}$) の基底、$\{v_k^*\}$, (resp. $\{v_k'^*\}$) を V_τ^*, (resp. $V_{\tau'^*}$) の対応する双対基底とする。Whittaker vector Φ_π を (2) 式に施して基底を走らすと、

$$
\sum_k \Phi_\pi(m\circ P^*(v_k'^*))v'_k = c_{\tau,\tau'}\sum_k \Phi_\pi(\iota'(v_k'^*))v'_k
\tag{3}
$$

を得る。各辺ごとに計算を進めると、まず、

$$\begin{aligned}(3)\text{ の右辺} &= c_{\tau,\tau'}\sum_k < v_k'^*,\ \Phi_{\pi,\tau'}(\cdot) > v_k' \\ &= c_{\tau,\tau'}\Phi_{\pi,\tau'}\end{aligned}$$

となる。一方、

$$\begin{aligned}(3)\text{ の左辺} &= \sum_{j,k,l} < v_k'^*, P(v_l \otimes X_j) > \Phi_\pi(\pi(X_j)\iota'(v_l^*))v_k' \\ &= \sum_{j,l} R_{X_j}\Phi_\pi(\iota(v_l^*))P(v_l \otimes X_j) \\ &= \sum_{j,l} P(< v_l^*, R_{X_j}\Phi_{\pi,\tau}(\cdot) > v_l \otimes X_j) \\ &= P \circ (\sum_j R_{X_j}\Phi_{\pi,\tau}(\cdot) \otimes X_j) \\ &= P \circ \nabla\Phi_{\pi,\tau}\end{aligned}$$

である。以上の結果を Proposition として述べる。

Proposition 2.1 (π, H_π) を G の許容表現、(τ, V_τ) を、その双対表現が π の *K-type* であるような K の有限次既約表現とする。また P を $\tau \otimes \mathrm{Ad}$ の既約成分 τ' への射影とする。このとき *Whittaker* 関数 $\Phi_{\pi,\tau}$ に対し、ある定数 $c_{\tau,\tau'}$ が存在して、

$$P \circ \nabla\Phi_{\pi,\tau} = c_{\tau,\tau'}\Phi_{\pi,\tau'}$$

が成り立つ。ただし τ'^* が π の *K-type* でないときは $c_{\tau,\tau'} = 0$ と約束する。

この shift operator を繰り返し使って同じ K-type の定義する Whittaker 関数に戻る(あるいはどこかで 0 になる)ことができれば、その shift operator の合成は Whittaker 関数を固有関数に持つことが示されることとなり、動径成分をとれば微分方程式も得られる。実際このことを見ていこう。

簡単のため、G をエルミート型の半単純リー群とする。定義より $\mathfrak{p}$ は複素構造 I を持ち、固有分解

$$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_-$$

を持つ。それに従って adjoint 表現は

$$\mathrm{Ad} = \mathrm{Ad}_+ + \mathrm{Ad}_-$$

と既約分解される。ただしここで $\mathrm{Ad}_\pm$ はそれぞれ Ad の $\mathfrak{p}_\pm$ への制限を表す。双対表現 Ad_+^* は自然に Ad_- と同一視できることに注意する。各成分への射影は、

$$p_\pm = 1/2(\mathrm{id} \mp \sqrt{-1}I) : \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{p}_\pm$$

で与えられる。ここで写像、

$$\nabla^{\pm} = (1_{V_\tau} \otimes p_{\pm}) \circ \nabla$$

を考えよう。これは、$C^{\infty}_{\eta,\tau}(N\backslash G/K)$ から $C^{\infty}_{\eta,\tau\otimes \mathrm{Ad}_{\pm}}(N\backslash G/K)$ への写像となり、先程と同様に各既約成分への射影 P を合成することによって shift operator が得られる。特に、$P\circ\nabla^{+}$ を up-shift operator、 $P\circ\nabla^{-}$ を down-shift operator と呼ぶ。これらは互いに逆の「道」を与えるのである。

後で計算に利用することを考慮してもう少し具体的に記述すると次のようになる。$\mathfrak{p}$ の正規直交基底として、

$$\{X_1,\ldots,X_{n/2}, IX_1,\ldots,IX_{n/2}\},\ (n=\dim\mathfrak{p})$$

をとる。これを Shmid operator の式に代入すると

$$\begin{aligned}
(4)\quad \nabla^{+}F &= (1_{V_\tau}\otimes p_{+})\circ\nabla F = (1_{V_\tau}\otimes p_{+})\left(\sum_{j=1}^{n/2} R_{X_j}F(\cdot)\otimes X_j + \sum_{j=1}^{n/2} R_{IX_j}F(\cdot)\otimes IX_j\right)\\
&= 1/2\left(\sum_{j=1}^{n/2} R_{X_j}F(\cdot)\otimes(X_j-\sqrt{-1}IX_j) + \sum_{j=1}^{n/2} R_{IX_j}F(\cdot)\otimes(IX_j+\sqrt{-1}X_j)\right)\\
&= 1/2\sum_{j=1}^{n/2} R_{(X_j+\sqrt{-1}IX_j)}F(\cdot)\otimes(X_j-\sqrt{-1}IX_j)
\end{aligned}$$

と書ける。同様に、

$$\nabla^{-}F = 1/2\sum_{j=1}^{n/2} R_{(X_j-\sqrt{-1}IX_j)}F(\cdot)\otimes(X_j+\sqrt{-1}IX_j)$$

がわかる。もちろん、定義から明らかではあるが、

$$\nabla = \nabla^{+} + \nabla^{-}$$

も直接計算できる。

Proposition 2.1 において、$c_{\tau,\tau'}\neq 0$ のとき、例えば、τ' が $\tau\otimes\mathrm{Ad}_{+}$ の既約成分とする。このとき $\tau'\otimes\mathrm{Ad}$ の既約成分には必ず τ が現れることがわかり、

$$P_\tau\circ\nabla\Phi_{\pi,\tau'} = c'_{\tau',\tau}\Phi_{\pi,\tau}$$

とでき、一つの K-type における関係式、

$$P_\tau\circ\nabla\circ P_{\tau'}\circ\nabla\Phi_{\pi,\tau} = (const.)\Phi_{\pi,\tau}$$

を得ることができる。つまり、エルミート型のときは、与えられた Whittaker 関数を固有関数に持つ shift operator が必ず構成できるのである。一般の場合も、Ad の既約成分をとることによりエルミート型のときと平行な議論ができる。

3 $SU(2,2)$ の場合

ここでは、特に $G=SU(2,2)$ のときに具体的な計算をしたいと思う。実際に Whittaker 関数の満たす微分方程式を導くことは誌面の都合上できないが、だいたいの筋道が把握できるべく、説明を試みたい。

今回、$\mathbb{R}$-rank が 2 でエルミート型の半単純リー群 $SU(2,2)$ において、主系列表現が一次元または二次元 K-type を持つときは次の形の微分方程式で Whittaker 関数 $\Phi_{\pi,\tau}$ が特徴付けられることが分かった。

$$C_2\,\Phi_{\pi,\tau}=\chi_\pi(C_2)\Phi_{\pi,\tau} \tag{5}$$

$$(\text{shift operator})\Phi_{\pi,\tau}=(\text{const.})\Phi_{\pi,\tau} \tag{6}$$

(C_2 は Casimir 作用素、χ_π は π の無限小指標)。従ってやるべきことは、**(I)** shift operator の構成、**(II)** 各作用素の動径成分の計算、**(III)** (特に shift operator の) 固有値の計算、である。**(II)** については岩沢分解を利用して各関係式を実際に微分していくのであるが、繁雑になるので別の機会に譲る ([1], [4], [7] で丁寧に計算されているのでそちらを参照のこと)。以下、特に **(I)** と **(III)** についてできる限り詳しく説明しようと思う。(ところで、Casimir 作用素も定数項を除いて shift operator で構成できるので厳密には (6) の形の二つの式で特徴付けられるというべきかもしれない。逆に、"$Z(\mathfrak{g})$" の生成元で特徴付けているということもできるが、実際は特に二次元 K-type を持つ場合など、shift operator の方がより詳しい情報を与え得ることがわかる。)

まず、記号を定めることから始める。G として、

$$G=\{\,g\in SL_4(\mathbb{C})\mid {}^t\overline{g}I_{2,2}\,g=I_{2,2}\,\}$$

を選ぶ。ここで、$I_{2,2}=\begin{pmatrix}1_2 & \\ & -1_2\end{pmatrix}$ とおいた。この極大コンパクト部分群として、

$$K=S(U(2)\times U(2))=\begin{pmatrix}U(2) & \\ & U(2)\end{pmatrix}\cap SL_4(\mathbb{C})$$

をとる。また G の Cartan 分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ は、

$$\mathfrak{k}=\left\{\begin{pmatrix}X_1 & \\ & X_2\end{pmatrix}\in\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})\;\middle|\;X_j\in\mathfrak{u}(2)\right\},$$

$$\mathfrak{p}=\left\{\begin{pmatrix} & X_{12}\\ {}^t\overline{X}_{12} & \end{pmatrix}\;\middle|\;X_{12}\in M_2(\mathbb{C})\right\},$$

で与えられる。$P=MAN$ を Langlands 分解とする。ここで、

$$M\simeq\mathbb{C}^{(1)}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$A\simeq(\mathbb{R}_{>0})^2$$

であり、以下同一視する。P の指標をそれぞれの指標の tensor で次のように定義する。

$$\sigma_{n,\epsilon} \otimes e^{\mu} \otimes 1_N((e^{\sqrt{-1}\theta}, \pm 1);\ (a_1, a_2);\ x) = e^{\sqrt{-1}n\theta}\epsilon(\pm 1)\, a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2}$$

(ただし、$n \in \mathbb{Z}$, $\mu = (\mu_1,\ \mu_2) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $x \in N$)。この指標から誘導して G の主系列表現

$$\pi = \mathrm{ind}_P^G(\sigma_{n,\epsilon} \otimes e^{\mu+\rho} \otimes 1)$$

をつくる。ここで、ρ は正ルートの半分和で、ここでは、

$$e^{\rho}(a_1, a_2) = a_1^3 a_2$$

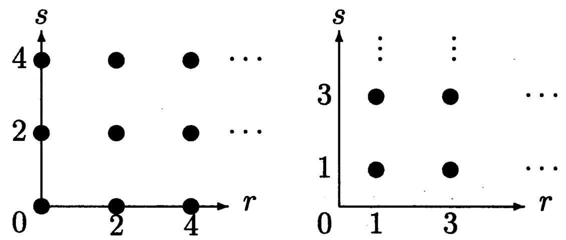
となる。

3.1 (I) shift operator の構成

どのような shift operator を構成するのか説明しよう。K の既約表現は、

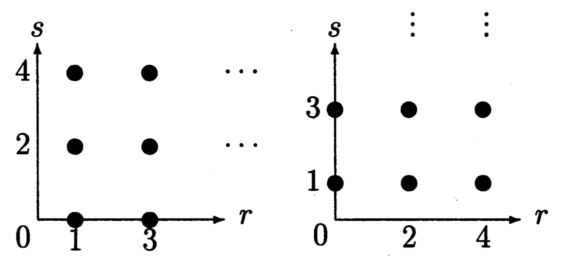
$$\widehat{K} = \left\{[r, s; u] \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z} \mid r + s + u \in 2\mathbb{Z}\right\}$$

でパラメーターづけできることがわかる (cf. §3.2)。また π の K-type のパラメーター空間における分布は次のようになる。
(i) π が 1 次元 K-type を含むとき、(m : 整数)



$u = u_0 + 4m$ $\qquad$ $u = u_0 + 2 + 4m$ $\qquad$ $(2s + u \in u_0 + 4\mathbb{Z})$

(ii) π が 2 次元 K-type を含むとき、



$u = u_0 + 1 + 4m$ $\qquad$ $u = u_0 + 3 + 4m$ $\qquad$ $(2s + u \in u_0 + 1 + 4\mathbb{Z})$

shift operator の「道」として次のようなものを選んだ。定義の都合上、π の K-type としては $\tau_{[r,s;u]}$ の双対 $\tau_{[r,s;-u]}$ を取っている。そのため、$C^{\infty}_{\eta,\tau_{[r,s;u]}}(N\backslash G/K) = C[r, s; u]$ と書くことにすると、以下の $C[r, s; u]$ は 上の図のちょうど u 軸を反対にした空間をパラメーター空間として持つことに注意する。

(i) $\dim\tau = 1$ のとき、

$$\mathcal{D}^{\mathrm{up}} : C[0,0;u_0] \xrightarrow{\nabla^+} C[1,1;u_0+2] \xrightarrow{P_1\circ\nabla^+} C[0,0;u_0+4]$$
$$\mathcal{D}^{\mathrm{down}} : C[0,0;u_0] \xleftarrow{\nabla^-} C[1,1;u_0+2] \xleftarrow{P_2\circ\nabla^-} C[0,0;u_0+4].$$

(ii) $\dim\tau = 2$ のとき、

$$\mathcal{E}^{(+,-)} : C[0,1;u_0+1] \xrightarrow{P_3\circ\nabla^+} C[1,0;u_0+3]$$
$$\overline{\mathcal{E}}^{(-,+)} : C[0,1;u_0+1] \xleftarrow{P_4\circ\nabla^-} C[1,0;u_0+3].$$

ここで P_j は適当な K- 射影である。このように定めたとき、

$$\mathcal{D}^{\mathrm{down}} \circ \mathcal{D}^{\mathrm{up}},\ \overline{\mathcal{E}}^{(-,+)} \circ \mathcal{E}^{(+,-)}$$

はそれぞれ、4 次、2 次の微分作用素を定める。我々はこれらを (6) 式の左辺として採用する。

3.2 (III) shift operator の固有値の計算

§2 で述べた事柄を一部、具体的にやってみよう。$\{f_1, f_2\}$ を 2 次元 $SL_2(\mathbb{C})$ 加群 V の標準的な基底とする。$S^d(V)$ を d 次対称 tensor の空間とし、その基底を、

$$f_p^{(d)} = f_1^{\otimes p} \otimes f_2^{\otimes(d-p)}\ (\text{対称 tensor}),\quad (0 \leqq p \leqq d)$$

ととる。$SL_2(\mathbb{C})$ の $S^d(V)$ への作用を、

$$\mathrm{sym}^d(g)(v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_d) = gv_1 \otimes gv_2 \otimes \ldots \otimes gv_d$$

で定義する。よく知られているように $SL_2(\mathbb{C})$ の既約表現は $(\mathrm{sym}^d, S^d(V))$ でつくされる。またこの微分表現も同様に定義され、同じ記号で書く。例えば、

$$h = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},\ e_+ = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix},\ e_- = \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}$$

を $\mathfrak{sl}_2$-triple とし、各元の作用を見ると、

$$\begin{aligned} \tau_r(h) f_k^{(r)} &= (2k-r) f_k^{(r)}, \\ \tau_r(e_+) f_k^{(r)} &= (r-k) f_{k+1}^{(r)}, \\ \tau_r(e_-) f_k^{(r)} &= k f_{k-1}^{(r)}, \end{aligned}$$

となることがわかる。さて、我々の群に戻ろう。$K_{\mathbb{C}} \simeq SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ であるから、

$$\tau_{[r,s;u]}(g_1, g_2; e^{\sqrt{-1}\theta}) = \mathrm{sym}^r(g_1) \otimes \mathrm{sym}^s(g_2) \otimes e^{\sqrt{-1}u\theta}$$

で $K_{\mathbb{C}}$ の既約表現を定義できる。またそれぞれの表現空間 $V_{rs} = S^r(V) \otimes S^s(V)$ の基底を $f_{kl}^{(rs)} = f_k^{(r)} \otimes f_l^{(s)}$ と書く。

次に adjoint 表現を具体的に書こう。

$$\mathfrak{p}_+ = \{X_{ij} \mid i = 1, 2,\ j = 3, 4\}_{\mathbb{C}},$$
$$\mathfrak{p}_- = \{X_{ij} \mid i = 3, 4,\ j = 1, 2\}_{\mathbb{C}},$$

とする。ここで $X_{ij} = \{\delta_{ip}\delta_{jq}\}_{pq}$ である。すると $\mathrm{Ad}_\pm = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}_\pm}$ は対応、

$$\iota_+ : (X_{23}, X_{13}, X_{24}, X_{14}) \mapsto (f_{00}^{(11)}, f_{10}^{(11)}, -f_{01}^{(11)}, -f_{11}^{(11)}),$$
$$\iota_- : (X_{41}, X_{31}, X_{42}, X_{32}) \mapsto (f_{00}^{(11)}, f_{01}^{(11)}, -f_{10}^{(11)}, -f_{11}^{(11)}),$$

によってそれぞれ $\tau_{[1,1;\pm 2]}$ と同型になる。

H_π の K-type と $\tau_{[r,s;u]}$ の同型を与えよう。簡単のため、$\sigma = \sigma_{n,\epsilon}$ と置く。良く知られているように制限写像によって

$$H_\pi \simeq L^2_\sigma(K) = \{\, F \in L^2(K) \mid F(mk) = \sigma(m)F(k) \text{ for } m \in M,\ k \in K \,\}$$

となる。以下これを同一視する。関数 $a_{pq,lm}^{(d)}(k)$ を

$$\tau_d(k) f_{pq} = \sum_{0 \leq l \leq r, 0 \leq m \leq s} a_{pq,lm}^{(d)}(k) f_{lm} \tag{7}$$

で定義する $(d = [r, s; u])$。このとき次のことがわかる。

Proposition 3.1 $[\pi|_K : \tau_d] = 1$ とする。

(i) $n \geqq 0$ のとき、 $\iota_\tau : f_{pq}^{(d)} \mapsto a_{pq,rs}^{(d)}$,
(ii) $n < 0$ のとき、 $\iota_\tau : f_{pq}^{(d)} \mapsto a_{pq,00}^{(d)}$

は $L^2_\sigma(K)$ への K- 単射である。

以下 ι_τ を固定して考えるものとする。

では、$\mathcal{E}^{(+,-)}$ について $n = 1$ のときのみ具体的に見ていこう。以下単に $a_{pq}^{(d)} = a_{pq,rs}^{(d)}$ と書くことにする。まず $(\tau_1, V_1) = (\tau_{[0,1;u_0]}, V_{01})$ とおく。適当な u_0 を選ぶことにより τ_1 の双対表現、$(\tau_{-1}, V_{-1}) = (\tau_{[0,1;-u_0]}, V_{01})$ が、$\pi = \mathrm{ind}_P^G(\sigma_{1,\epsilon} \otimes e^{\mu+\rho} \otimes 1)$ に重複度 1 で現れるようにできる。$\tau_1 \otimes \mathrm{Ad}_+$ は既約分解、$\tau_{[1,0;u_0+2]} \oplus \tau_{[1,2;u_0+2]}$ を持つ。また、$\tau_2 = \tau_{[1,0;u_0+2]}$, $\tau_{-2} = \tau_{[1,0;-u_0-2]}$ と置くと τ_{-2} も π の K-type となる。ここでは $V_2 = V_{\tau_2}$ への射影として次で定義される P を選ぶ。

$$\begin{aligned} P(f_{00}^{(1)} \otimes X_{13}) = P(f_{00}^{(1)} \otimes X_{23}) = P(f_{01}^{(1)} \otimes X_{24}) = P(f_{01}^{(1)} \otimes X_{14}) = 0,& \\ P(f_{00}^{(1)} \otimes X_{24}) = P(f_{01}^{(1)} \otimes X_{23}) = -f_{00}^{(2)},& \\ P(f_{00}^{(1)} \otimes X_{14}) = P(f_{01}^{(1)} \otimes X_{13}) = -f_{10}^{(2)}.& \end{aligned} \tag{8}$$

$\{ f_{kl}^{(j)*} \}$ を $\{ f_{kl}^{(j)} \}$ の双対基底とすると定義より、

$$P^*(f_{00}^{(2)*}) = -f_{00}^{(1)*} \otimes X_{42} - f_{01}^{(1)*} \otimes X_{32},$$
$$P^*(f_{10}^{(2)*}) = -f_{00}^{(1)*} \otimes X_{41} - f_{01}^{(1)*} \otimes X_{31}$$

がわかる。V_j^* と V_{-j} の同型を、次で決めて固定する。

$$V_1^{(*)} \ni \{ f_{00}^{(1)*},\ f_{01}^{(1)*} \} \mapsto \{ -f_{01}^{(-1)},\ f_{00}^{(-1)} \} \in V_{-1},$$
$$V_2^{(*)} \ni \{ f_{00}^{(2)*},\ f_{10}^{(2)*} \} \mapsto \{ -f_{10}^{(-2)},\ f_{00}^{(-2)} \} \in V_{-2}.$$

すると (2) は、

$$\begin{aligned} m \circ P^*(f_{10}^{(-2)}) &= m(f_{00}^{(-1)} \otimes X_{32} - f_{01}^{(-1)} \otimes X_{42}) \\ &= \pi(X_{32})\iota_{\tau_{-1}}(f_{00}^{(-1)}) - \pi(X_{42})\iota_{\tau_{-1}}(f_{01}^{(-1)}) \\ &= \pi(X_{32})a_{00}^{(-1)} - \pi(X_{42})a_{01}^{(-1)} \end{aligned}$$

より、

(9) $$\pi(X_{32})a_{00}^{(-1)} - \pi(X_{42})a_{01}^{(-1)} = c_{1,2} \cdot a_{10}^{(-2)}$$

という関係式になる。

定数 $c_{1,2}$ を求めるため、両辺の単位元での値を比べてみよう。定義式 (7) より、

$$a_{10}^{(-2)}(1_4) = a_{10,10}^{(-2)}(1_4) = 1$$

がまずわかる。つまり右辺は $c_{1,2}$ となる。X_{32}, X_{42} の岩沢分解 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{n} + \mathfrak{a} + \mathfrak{k}$) は、

$$\begin{aligned} X_{32} &= \left(\begin{array}{c|c} e_+ & \\ \hline e_+ & \end{array}\right) + (0,\,0) - \left(\begin{array}{c|c} e_+ & \\ \hline & \end{array}\right) \\ X_{42} &= (\mathfrak{n}\text{ の元}) + (0,\,1/2) - 1/4(I_{2,2} - \left(\begin{array}{c|c} h & \\ \hline & \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & h \end{array}\right)) \end{aligned}$$

となる。すると、

$$\begin{aligned} \pi(X_{32})a_{00}^{(-1)}(1_4) &\equiv -a_{00}^{(-1)}(\left(\begin{array}{c|c} e_+ & \\ \hline & \end{array}\right)) \\ &= -\pi(\left(\begin{array}{c|c} e_+ & \\ \hline & \end{array}\right))(a_{00}^{(-1)})(1_4) \\ &= -\iota_{\tau_{-1}}(\tau_{-1}(e_+, 0; 0)f_{00}^{(-1)})(1_4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり、また同様に $a_{01}^{(-1)}(1_4) = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} \pi(X_{42})a_{01}^{(-1)}(1_4) &\equiv a_{01}^{(-1)}((0,\,1/2) - 1/4(I_{2,2} - \left(\begin{array}{c|c} h & \\ \hline & \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & h \end{array}\right))) \\ &= 1/2(\mu_2 + 1)a_{00}(1_4) - 1/4\iota_{\tau_{-1}}(\tau_{-1}(-h, h; I_{2,2})f_{01}^{(-1)})(1_4) \\ &= 1/2(\mu_2 + 1) - 1/4(0 + (2-1) + (-u_0)) = 1/4(2\mu_2 + u_0 + 1) \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$c_{1,2} = -1/4(2\mu_2 + u_0 + 1)$$

がわかる。

このようにして単位元の値を比べることにより、shift operator の固有値は求まる。

4 主結果

以上の計算の結果、次の定理を得た。どの場合も (5), (6) に対応する順で書かれている。また、u に関する合同条件は $[\pi|_K : \tau^*] = 1$ となる必要十分条件である。

Theorem 4.1 $a = (a_1, a_2) \in A$, $\partial_j = a_j(\partial/\partial a_j)$, $(j = 1, 2)$ とする。$[\pi|_K : \tau^*] = 1$ と仮定し、ρ を正ルートの半分和とするとき、$I(a) = a^{-\rho}\Phi_{\pi,\tau}(a)$ とおく。このとき、I は次の連立偏微分方程式を満たす。

(i) $\dim \tau = 1$ のとき。$\tau = \tau_{[0,0;u]}$ とおく。

$$\begin{aligned}
&\{\partial_1^2 + \partial_2^2 - \eta_2^2 a_2^4 + u\eta_2 a_2^2 + 2\eta_0 (a_1/a_2)^2\} I = (\mu_1^2 + \mu_2^2) I, \\
&\{(\partial_1^2 - (u/2+1)^2) \left(\partial_2^2 - (u/2+1)^2 - \eta_2^2 a_2^4 + u\eta_2 a_2^2\right) \\
&\qquad -2\eta_0 (a_1/a_2)^2 (\partial_1 + 1)(\partial_2 - 1) - u(u/2+2)\eta_0 (a_1/a_2)^2 + u\eta_0\eta_2 a_1^2 \\
&\qquad\qquad + (a_1/a_2)^4 \eta_0^2\} I = (\mu_1^2 - (u/2+1)^2)(\mu_2^2 - (u/2+1)^2) I
\end{aligned}$$

(ii) $\dim \tau = 2$ のとき。$|n| = 1$ と仮定する。このとき適当な u を選べば、$\tau_{[0,1;u]}$ または、$\tau_{[1,0;u]}$ の双対が π に重複度 1 で現れる。

(a) $\tau = \tau_{[0,1;u]}$ のとき。$I(a) = b_{00}(a) f_{00} + b_{01}(a) f_{01}$ とおく。

$$\begin{pmatrix} \tilde{L_0} + (u-1)\eta_2 a_2^2 & -2\xi'(a_1/a_2) \\ 2\xi(a_1/a_2) & \tilde{L_0} + (u+1)\eta_2 a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{01} \end{pmatrix} = (\mu_1^2 + \mu_2^2) \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{01} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathcal{P}_2 - \eta_2 a_2^2 (u-1) & \xi'(a_1/a_2)(\partial_1 + \partial_2 + \eta_2 a_2^2 - 1) \\ \xi(a_1/a_2)(\partial_1 + \partial_2 + \eta_2 a_2^2 + 1) & \mathcal{P}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{01} \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{cases} \mu_2^2 \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{01} \end{pmatrix} & (n = 1,\ u \equiv \epsilon(-1) \pmod 4) \\ \mu_1^2 \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{01} \end{pmatrix} & (n = -1,\ u \equiv -\epsilon(-1) \pmod 4). \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) $\tau = \tau_{[1,0;u]}$ のとき。$I(a) = b_{00}(a) f_{00} + b_{10}(a) f_{10}$ とおく。

$$\begin{pmatrix} \tilde{L_0} + (u+1)\eta_2 a_2^2 & -2\xi'(a_1/a_2) \\ 2\xi(a_1/a_2) & \tilde{L_0} + (u-1)\eta_2 a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{10} \end{pmatrix} = (\mu_1^2 + \mu_2^2) \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 & -\xi'(a_1/a_2)\,(\partial_1+\partial_2-\eta_2 a_2^2+1) \\ -\xi(a_1/a_2)\,(\partial_1+\partial_2-\eta_2 a_2^2+1) & \mathcal{P}_2+\eta_2 a_2^2(u-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{10} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{cases} \mu_2^2 \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{10} \end{pmatrix} & (n=1,\, u \equiv \epsilon(-1) \pmod 4) \\ \mu_1^2 \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{10} \end{pmatrix} & (n=-1,\, u \equiv -\epsilon(-1) \pmod 4). \end{cases}$$

ただし、

$$\mathcal{P}_1 = \partial_1^2 + (a_1/a_2)^2\,\eta_0,$$
$$\mathcal{P}_2 = \partial_2^2 - \eta_2^2 a_2^4 + (a_1/a_2)^2\,\eta_0,$$
$$\tilde{L}_0 = \partial_1^2 + \partial_2^2 - \eta_2^2 a_2^4 + \eta_0\,(a_1/a_2)^2$$

とおいた。また、η_0, η_2, ξ, ξ' は η によって決まる定数である。

注意：この結果は $Sp(2;\mathbb{R})$ の 主系列 Whittaker 関数の満たす微分方程式と (定数を取り替えることによって) 一致する。

参考文献

[1] T. Hayata, *Differential equations of principal series Whittaker funcitons on* $SU(2,2)$, preprint.

[2] A. W. Knapp, *Representation theory of semisimple groups, —an overview based on examples—*, Princeton Mathematical Series, vol. 36, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1986.

[3] B. Kostant, *On Whittaker vectors and representation theory*, Invent. Math. **48** (1978), 101–184.

[4] T. Miyazaki and T. Oda, *Principal series Whittaker functions on* $Sp(2;R)$, *– explicit formulae of differential equations –*, Proceedings of the 1993 Workshop, Automorphic Forms and Related Topics, The Pyungsan Institute for Mathematical Sciences, 1993, pp. 59–92.

[5] W. Schmid, *On the realization of the discrete series of a semisimple Lie groups*, Rice Univ. Stud. **56** (1970), no. 1, 99–108.

[6] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[7] H. Yamashita, *Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups I, – general theory and the case of* $SU(2,2)$ *–*, Japan. J. Math. (N.S.) **16** (1990), no. 1, 31–95.

E-mail address: hayata@math.s.kobe-u.ac.jp